

《应用随机过程》第五次作业和参考答案

对外经济贸易大学版本

1. 试找出使得 ITO 积分 $Y(t) = \int_0^t (t-s)^{-\alpha} dW_s$ 存在的 α 值, 并给出过程 $\{Y(t)\}$ 的协方差函数 (此过程称为分形 brown 运动)。

解: 由 ITO 积分定义可知, 只要 $\forall t \geq 0, \int_0^t (t-s)^{-2\alpha} ds < \infty$ 成立, 即有积分存在, 故有 $\alpha < \frac{1}{2}$ 。 $Y(t)$ 的协方差函数为:

$$\text{Cov}(Y(t), Y(t+u)) = \int_0^t (t-s)^{-\alpha} (t+u-s)^{-\alpha} ds$$

2. 设 $X(t)$ 具有随机微分形式

$$dX(t) = (bX(t) + c)dt + 2\sqrt{X(t)}dW(t)$$

并假定 $X(t) \geq 0$, 试找出过程 $Y(t) = \sqrt{X(t)}$ 的随机微分形式。

解: 由 ITO 公式得 $dY(t) = \left[\frac{b}{2}Y(t) + \frac{c-1}{2Y(t)} \right] dt + dW(t)$

3. 设 B_t 为标准布朗运动, 利用 ITO 公式计算下面式子:

$$(1) X_t = e^{\frac{t}{2}} \cos(B_t)$$

$$(2) X_t = e^{\frac{t}{2}} \sin(B_t)$$

解: 由 ITO 公式得

$$(1) X(t) = X(0) - \int_0^t e^{\frac{s}{2}} \sin(B_s) dB_s$$

$$(2) X(t) = X(0) + \int_0^t e^{\frac{s}{2}} \cos(B_s) dB_s$$